SÈRIES NUMÈRIQUES I SÈRIES DE POTÈNCIES

1. Un exemple de *sèrie telescòpica* .

   (a) Determineu les constants A i B en la descomposició en fraccions simples següent
   $$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$$

   (b) Utilitzeu la representació anterior per a calcular la suma de la sèrie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

2. Utilitzeu la mateixa tècnica de l'exercici anterior per a calcular la suma de la sèrie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$.

3. Comproveu que les sèries següents són convergents i calculeu-ne la suma en cada cas
   $$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^{n+1}\, 3^n}{4^n} \qquad \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{7^n}$$

4. Estudieu la convergència de les sèries següents, utilitzant els diferents criteris de convergència
   $$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+6}{n^2+3n+8} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{3^n+n} \qquad \text{(c)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-n+2}{n^2+n+1}$$
   $$\text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{3^n\, n!} \qquad \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} \qquad \text{(f)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$$
   $$\text{(g)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2+3} \qquad \text{(h)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3+2}{n^6+n+5} \qquad \text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^5-3n^2+1}{n^5+2n^4+2}$$

5. Determineu el radi de convergència i l'interval de convergència de les sèries de potències següents
   $$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2\, 2^n} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}} \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n \qquad \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} x^n$$

6. (a) Deriveu formalment la sèrie geomètrica per obtenir
   $$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n\,, \qquad (\text{per } |x| < 1)$$

   (b) Utilitzeu l'apartat anterior per calcular la suma de la sèrie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

7. (a) Utilitzeu el desenvolupament de la sèrie geomètrica per comprovar que, si $|x| < 1$,

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

   (b) Integreu formalment per deduir el desenvolupament de $\arctan x$ en sèrie de Taylor:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

8. (a) A partir del desenvolupament en sèrie de potències

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

   determineu el desenvolupament en sèrie de potències de la funció e^{-x^2}.

   (b) Utilitzeu (1) per a calcular la suma de la sèrie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!}$

9. Determineu les funcions que tenen els desenvolupaments de Taylor següents (a l'origen):

   (a) $1 + x^3 + \dfrac{x^6}{2!} + \dfrac{x^9}{3!} + \dfrac{x^{12}}{4!} + \cdots$

   (b) $1 - 4x + 4^2x^2 - 4^3x^3 + 4^4x^4 + \cdots$

   (c) $1 - \dfrac{5^3x^3}{3!} + \dfrac{5^5x^5}{5!} - \dfrac{5^7x^7}{7!} + \cdots$

   (d) $x^2 - \dfrac{x^6}{3} + \dfrac{x^{10}}{5} - \dfrac{x^{14}}{7} + \cdots$